10/11/2016

Μαθημα 9ο

Εισαγωγη στις διαφορικες Εξισωσεις:

Ορισμος: Ας ειναι $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$, I διαστημα. Θα λεμε ότι $f_1, \dots, f_n$ είναι γραμμικά εξαρτημενες αν υπαρχουν σταθερες $c_1, \dots, c_n$ με $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$ και $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$, $x \in I$.

Ορισμος: Αν οι $f_1, \dots, f_n$ δεν είναι γραμμικα εξαρτημενες, τοτε λεμε οτι είναι γραμμικά ανεξαρτητες.

πχ Νδο οι συναρτησεις: $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = -\sin x$ είναι γραμ. ανεξαρτητες.

Λυση

Υποθετω οτι για c_1, c_2, c_3 ειναι:

$c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$c_1 + c_2 \cos x - c_3 \sin x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$x = 0$: $c_1 + c_2 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $c_1 - c_3 = 0$ $\Rightarrow c_3 = c_2 = c_1 = 0$.

$x = \pi$: $c_1 = c_2 = 0$.

Άρα οι συναρτησεις είναι γρ. ανεξαρτητες στο $\mathbb{R}$.

Ασκ. 3iii: Να εξεταστει αν $f_1 = 1$, $f_2 = \log x$, $f_3 = \log x^2$, $x > 0$ είναι γραμ. εξαρτημενες.

Λυση

Ας είναι $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ με $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$, $x > 0$

τοτε $c_1 + c_2 \log x + c_3 \log x^2 = 0$, $x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 + (c_2 + 2c_3)\log(x) = 0$.

$\rightarrow c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1$

$(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ Οι συναρτησεις είναι γρ. εξαρτημενες.

Άσκηση: Ας είναι $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x_i)\neq 0$, $(i=1,\dots,n)$, $x_i\neq x_j$, $i\neq j$, $x_i>0$. Τότε οι συναρτήσεις $f_k(x)=x^{k-1}f(x)$, $x>0$, $k=1,\dots,n)$ είναι γραμμ. εξαρτημένες.

Λύση:

Ας είναι $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$: $c_1f_1+\dots+c_nf_n=0$.

Θεωρώ το σύστημα: $c_1f_1(x_1)+\dots+c_nf_n(x_1)=0$

$$\vdots$$

$$c_nf_1(x_n)+\dots+c_nf_n(x_n)=0$$

και παρατηρώ ότι η ορίζουσα του $n\times n$ ομογενούς γρ. συστήματος είναι:

$$D=\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ & \dots & & \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(x_1) & x_1f(x_1) & \dots & x_1^{n-1}f(x_1) \\ \vdots & & \cdot & \\ f(x_n) & x_nf(x_n) & \dots & x_n^{n-1}f(x_n)\end{vmatrix}=$$

$$=\underbrace{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}_{\neq 0}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}}_{=\prod(x_i-x_j)\neq 0}$$

δηλ. $D\neq 0 \Rightarrow c_1=c_2=\dots=c_n=0$

$\Rightarrow f_1,\dots,f_n$ γρ. ανεξάρτητες.

$$A(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ & & \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x)\end{bmatrix}$$

$f_{ij}(x)$ παραγωγίσιμες στο I.

$A'(x)=[f'_{ij}(x)]$, $x\in I$.

Για την ορίζουσα είναι:

$$\frac{d}{dx}D(A(x))=D_1(x)+\dots+D_n(x),$$

όπου
$$D_i(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ f_{i-1\,1}(x) & \dots & f_{i-1\,n}(x) \\ f'_{i1}(x) & \dots & f'_{in}(x) \\ \vdots & & \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x)\end{bmatrix}$$

Πχ $\begin{vmatrix} x & e^x \\ x^2 & \cos x \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ x^2 & \cos x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & e^x \\ 2x & -\sin x \end{vmatrix}$

(*) Αν p πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και $\sigma + i\tau$ $(\sigma, \tau \in \mathbb{R})$ ρίζα πολλ/τητας k, $(k \in \mathbb{N})$ τότε και ο συζυγής $\sigma - i\tau$ είναι ρίζα του p πολ/τησας k.

(*) Ο τελεστής L: είναι γραμμικός $(L : C^n(I) \to C(I))$
$L(\varphi) = a_n \varphi^{(n)} + \dots + a_1 \varphi' + a_0 \varphi$ $[a_0, a_1, \dots, a_n \in C(I)]$.

Ορισμός: Αν $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ έχουν παραγώγους μέχρι και $m-1$ τάξης, τότε η ορίζουσα

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_m(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_m'(x) \\ \vdots & & \\ f_1^{(m-1)} & \dots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

καλείται ορίζουσα Wronski των $f_1, \dots, f_n$.

Πχ $f_1(x) = x^2$ & $f_2(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρεθεί η ορίζουσα Wronsky.

Λύση

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x^2 & \cos x \\ 2x & -\sin x \end{vmatrix} = -x^2 \sin x - 2x \cos x.$$

Πχ $W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$

Παρατηρηση:

$f_1, \ldots, f_m$: γραμμ. εξαρτημενες $\in C^{m-1}(x)$

Τοτε $W(f_1, \ldots, f_n) = 0$.

Ασκηση: Να βρεθει η οριζουσα Wronski των $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^x(x-1)$

$y_3(x) = 2e^x - e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λυση

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & (x-1)e^x + e^x & 2e^x - 2e^{2x} \\ e^x & e^x + xe^x & 2e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 2e^x - e^{2x} \\ 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & 2e^x & 3e^{2x} \end{vmatrix}$$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε. n-ταξης:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $x \in I$ $(E_0)^{(n)}$

$a_n, \ldots, a_0 \in C(I)$, $a_n(x) \neq 0$, $x \in I$.

Θεωρημα 3: Αν $\{y_1, \ldots, y_k\}$ λυσεις της (E_0) τοτε και η

$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$, $x \in I$ ειναι λυση της (E_0), $(c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$

Θεωρημα 4: Ας ειναι $y_1, \ldots, y_n$ λυσεις της $(E_0)^{(n)}$ στο I. Οι $y_1, \ldots, y_n$

ειναι γραμμ. ανεξαρτητες στο $I \Leftrightarrow W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0 \;\; \forall x \in I$

με αποδειξη απο

το βιβλιο.

Θεώρημα (Liouville): Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της $(E_0)^n$ και $x_0 \in I$

Τότε $W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}$; $x \in I$.

→ + απόδειξη.

"Η ορίζουσα Wronski ή θα μηδενίζεται παντού ή πουθενά".